Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение

«Дивеевская средняя общеобразовательная школа»

УТВЕРЖДАЮ

Директор МБОУ "Дивеевская СОШ"

__________ /В.М.Лупова /

Приказ № _211_ от _01.09.__2016 г.

Рабочая программа
по элективному курсу

«Математика»
(10-11 класс)

Количество часов в неделю – 1

Количество часов всего - 68
Срок реализации программы – 2 года

Авторы-составители:
Трифонов Д. Г.

с. Дивеево

2016 г.

Пояснительная записка

Данный элективный курс выполняет функцию поддержки основных курсов цикла математического образования старшей школы и ориентирован на углубление и расширение предметных знаний по математике и соответствующих компетентностей по ним.

Курс предназначен преимущественно учащимся, профилирующимся в информационно-технологическом направлении. Однако он может быть востребован и учащимися других профилей как возможность восполнить пробелы их предыдущей подготовки по математике.

Программа элективного курса состоит из двух завершенных образовательных разделов одной и то же продолжительности 34 часа:

1. математика-плюс;
2. функции в задачах с параметрами в курсе старшей школы и на вступительных экзаменах.

Полностью курс рассчитан на два учебных года по два часа в неделю аудиторных занятий. Общий объем развернутого курса 68 часов. Но не весь объем содержания элективного курса является строго обязательным. Доминанта умений и позитивного опыта может быть обеспечена на любом завершенном разделе по выбору учителя. Таким образом, возможен такой вариант, при котором ученик выполняет обязательный набор заданий только по одному разделу. Кроме того, обучение может осуществляться в виде различных комбинаций предложенных разделов.

Данная программа элективного курса своим содержанием сможет привлечь внимание учащихся 10 – 11 классов, которым интересна элементарная математика и её приложения. Предлагаемый курс освещает вопросы, оставшиеся за рамками школьного курса математики. Он выполняет следующие основные функции:

- развитие содержания базовых учебных предметов по математике, что позволяет поддерживать их изучение на профильном уровне и получить дополнительную подготовку для сдачи единого государственного экзамена или вступительных испытаний в выбранные выпускниками вузы;
- удовлетворение познавательного интереса обучающихся, выбравших для себя те области деятельности, в которых математика играет роль аппарата, специфического средства для изучения закономерностей окружающего мира.

Поэтому одной из важных задач введения этого курса является не только прагматическая составляющая по развитию интереса к математике как необходимому средству поступления в вуз, но и развитие у учащихся интереса собственно к математике. Ученик должен чувствовать эстетическое удовлетворение от красиво решенной задачи, от установленной им возможности приложения математики к другим наукам. В математике эквивалентом эксперимента предметов естественно-научного цикла является решение задач. Поэтому и курс строится на решении различных по степени важности и трудности задач.

Направленность курса – развивающая. Прежде всего, он ориентирован на удовлетворение и поощрение любознательности старших школьников, их аналитических и синтетических способностей.

В процессе реализации элективного курса можно использовать разнообразные подходы к организации занятий как академические лекции, семинары, уроки, так и проектную и исследовательскую деятельность, практики, игровые технологии и т.д.

Предполагается, что в результате изучения курса учащиеся овладеют:

- элементами теории множеств, умением математического моделирования при решении задач различной сложности, знаниями, связанными с равносильностью уравнений и неравенств на множестве, что позволяет единообразно решать большие классы задач;
- нестандартными методами решений уравнений и неравенств с использованием свойств функций;
- навыками решения нестандартных задач, включая задачи с параметром, для этого предложена некоторая классификация таких задач и указаны характерные внешние признаки в их формулировках, которые позволяют школьнику сразу отнести задачу к тому или иному классу;
- умениями, связанными с работой с научно-популярной и справочной литературой;
- элементами исследовательских процедур, связанных с поиском, отбором, анализом, обобщением собранных данных, представлением результатов самостоятельного микроисследования.

В рамках данного элективного курса предполагается различный текущий и итоговый контроль: тесты, самостоятельные работы, выполнение проектов и исследовательских работ. Способ изложения материала в проектах побуждает учащихся не просто механически запоминать учебный материал, но и размышлять над ним в процессе обучения.

С учетом того, что данный курс выбирается учащимися самостоятельно, целесообразно, при оценке результата, использовать наравне с традиционной и нетрадиционную систему оценивания.

Практически по каждой теме, затронутой в программе, элективный курс предоставляет учителю и ученику дополнительные материалы как теоретического, так и практического характера. Кроме того, отдельные пункты курса могут послужить основой для докладов на математических кружках и факультативах. Первый раздел представлен наиболее полно, так как охватывает широкий круг вопросов.

Данный курс имеет прикладное и общеобразовательное значение, способствует развитию логического мышления учащихся, намечает и использует целый ряд межпредметных связей.

Примерное учебно-тематическое планирование

элективного курса в 10 -11 классах

№	**Наименование разделов и дисциплин**	**Всего часов**	**Лекции**	**Выполнение практических заданий**
1	**Математика-плюс (10 класс)**	**34**	**10**	**24**
	Элементы теории множеств	3	1	2
	Изображения множества точек на плоскости	6	2	4
	Линейная и квадратичная функция	6	2	4
	Текстовые задачи	6	-	6
	Равносильность уравнений на множествах.	3	1	2
	Равносильность неравенств на множествах.	4	2	2
	Равносильность уравнений, неравенств системам.	4	2	2
	Повторение. Решение задач.	2	-	2
2	**Функции в задачах с параметрами в курсе старшей школы и на вступительных экзаменах (11 класс)**	**34**	**6**	**28**
	Многочлены	2	1	1
	Рациональные функции	4	1	3
	Иррациональные функции	6	1	5
	Тригонометрические функции	6	1	5
	Показательные функции	4	1	3
	Логарифмические функции	6	1	5
	Особенности заданий с параметрами на вступительных испытаниях. Тестовые задания.	4		4
	Повторение. Решение задач.	2		2
Итого		**68**	**16**	**52**

Основное содержание курса
«Дополнительные главы профильной математики»

1. Математика-плюс (34 час.)

Элементы теории множеств (3 час.) Изображения множества точек на плоскости (6 час.)

Линейная и квадратичная функция (6 час.) Текстовые задачи (6 час.) Равносильность уравнений на множествах (3 час.) Равносильность неравенств на множествах (4 час.) Равносильность уравнений и неравенств системам (4 час.) Повторение. Решение задач (2 час.)

2. Функции в задачах с параметрами в курсе старшей школы и на вступительных экзаменах (34 час.)

Многочлены (2час.) Рациональные функции (4час.) Иррациональные функции (6час.) Тригонометрические функции (6час.) Показательные функции (4час.) Логарифмические функции (6час.) Особенности заданий с параметрами на вступительных испытаниях. Тестовые задания (4час.) Повторение. Решение задач (2час.)

Методическое обеспечение раздела «Математика плюс»

Самостоятельная работа по теме «Элементы теории множеств»

Вариант № 1	Вариант № 2
1. Назовите три элемента, принадлежащих множеству чисел, кратных трем и не делящихся на пять.	**1.** Назовите три элемента, принадлежащих множеству простых чисел, принадлежащих промежутку $[81;99]$.
2. Исследуйте, принадлежат ли числа $\frac{2}{5},\frac{17}{20},-\frac{1}{7},\frac{5}{6}$ множеству $A=\left\{\frac{n^2+1}{n^2+4}\middle\vert n\in N\right\}$.	**2.** Докажите, что указанное множество не содержит целых чисел $A=\left\{\frac{n}{n+1}\middle\vert n\in N\right\}$.
3. Найдите множество корней уравнения $\frac{x+4}{2x^2-8x+6}-\frac{x-3}{2-2x^2}=\frac{x+6}{x^3-3x^2-x+3}$	**3.** Найдите множество корней уравнения $\frac{x+5}{2x^2+6x-8}+\frac{x-7}{64-4x^2}+\frac{9}{x^3-x^2-16x+16}=0$
4. Пусть А=$[1;6]$, В=$[2;7]$, С=$[-1;3]$, Д=$[2;5]$. Найдите множество $((A\cup B)\cap C)\cup Д$; $(A\cap B)\cup(C\cap Д)$	**4.** Пусть А=$[-2;4]$, В=$[1;6]$, С=$[-1;1]$, Д=$[0;7]$. Найдите множество $((A\cup B)\cap C)\cup Д$; $(A\cap B)\cup(C\cap Д)$
5. Из 35 учащихся класса 20 посещают математический кружок, 11 – физический, 10 учащихся не посещают ни одного из этих кружков. Сколько учеников посещают только математический кружок?	**5.** В отделе института работают несколько человек. Каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. 6 человек знают английский, 6 – немецкий, 7 – французский, 4 знают английский и немецкий, 3 – немецкий и французский, 2 - французский и английский, 1 человек знает все три языка. Сколько человек работает в отделе? Сколько из них знают только английский язык? только французский? Сколько человек знает ровно 1 язык?

Самостоятельная работа по теме «Изображения множества точек на плоскости»

Вариант 1	Вариант 2
1. Постройте кривые линии $x+y=-2$; $xy-x=2$.	**1.** Постройте кривые линии $x+y=5$ и $x^2+y^2=4y$.
2. Решите графически систему уравнений: $\begin{cases} x+5y=4,\\ y=\sqrt{\lvert x+2\rvert}.\end{cases}$	**2.** Решите графически систему уравнений: $\begin{cases} \lvert y\rvert=x-3,\\ y=x^2-8x+15.\end{cases}$
3. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению: $\lvert y\rvert=2\lvert x\rvert-x^2$	**3.** Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению: $\lvert x-2\rvert+\lvert y\rvert=2$
4. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству: $x^2+y^2-2\lvert x\rvert+4y-1\le 1$	**4.** Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству: $y+3<\sqrt{\lvert x-1\rvert}$
5. Найдите все значения параметра а, при которых окружности $x^2+y^2=1$ и $(x-a)^2+y^2=4$ касаются.	**5.** Найдите все значения параметра а $(a>0)$, при которых окружности $x^2+y^2=1$ и $(x-3)^2+(y-4)^2=a^2$ касаются. Найдите координаты точки касания.

Проект «Исследование линейной функции на отрезке»

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения заданной линейной функции на отрезке $[-3;2]$.
   А) $y = 2x+3$, Б) $y = -3x+7$.
2. Обращаются ли указанные функции на заданном отрезке в нуль?
3. Для каждой из указанных функций найдите отрезок $[a;b]$так, чтобы областью значений функции на этом отрезке был отрезок $[-1;1]$.
4. При каких значениях k функция $y = 2x+3+k(-3x+7)$:
   А) постоянна;
   Б) возрастает;
   В) ее график проходит через начало координат;
   Г) имеет положительный корень?

Проект «Исследование линейных систем с параметром»

Линейная система двух уравнений с двумя неизвестными вида $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ имеет единственное решение, если коэффициенты при неизвестных не пропорциональны. Условие пропорциональности удобно записать так: $a_1b_2 = a_2b_1$. Исследуйте системы по схеме:

1. Сначала определите, при каких значениях параметра a система имеет единственное решение;
2. Затем найдите эти решения (они будут зависеть от a);
3. Далее отдельно разберите случай исключительных значений a, подставляя эти значения в систему.

А) $\begin{cases} (a+3)x-2y=5, \\ (a+1)x+y=7; \end{cases}$ Б) $\begin{cases} (a-5)x-2y=a-7, \\ (a+1)x+ay=3a; \end{cases}$

В) $\begin{cases} (a+3)x+2y=2a, \\ 2x+ay=1; \end{cases}$ Г) $\begin{cases} ax+(2a+6)y=4, \\ x+(a+1)y=a. \end{cases}$

Проект «Уравнение прямой с угловым коэффициентом»

Найдите угловые коэффициенты прямых, удовлетворяющих заданным условиям, и запишите уравнения этих прямых в виде $y = kx+b$.

1. Прямая проходит через две точки из заданного списка из пяти точек. Сначала подсчитайте, сколько разных прямых должно получиться. $P_1(0;0), P_2(3;5), P_3(-5;2), P_4(-2;-4), P_5(6;-1)$.
2. Прямая проходит через точку P_2 и параллельна одной из прямых, проведенных через две из оставшихся четырех точек.
3. Прямая проходит через точку P_3 и перпендикулярна одной из прямых, проведенных через две из оставшихся четырех точек.

Проект «Построение графиков зависимостей»

Постройте графики линейных зависимостей между x и y, зная следующие условия:

1. $\dfrac{y}{x} = 2,$
2. $y = 2x-4,$
3. $x+y=-1,$
4. $y = 3x+b$ и точка (1;6) лежит на графике;
5. $y = kx+2$ и прямая параллельна прямой $y = 2x$;
6. точки (1;1) и (3;5) лежат на графике.

Проект «Чтение графика»

Отметьте для каких прямых выполняются перечисленные условия.

Вариант 1

1	$x+y=5$
2	$y=5x+4$
3	$x=3-y$
4	$3x+2y-1=0$
5	$y+1=2(x-2)$

А	Проходит через точку (2;-1)
Б	Параллельна прямой $y=-x$
В	Отсекает на осях равные отрезки
Г	Наклонена под острым углом к Ox
Д	Пересекает Oy в верхней полуплоскости

Вариант 2

1	$2x-3y-1=0$
2	$2x+2y=1$
3	$y+1=3(x-2)$
4	$x-y=3$
5	$y=-2x+1$

А	Проходит через точку (1;-2)
Б	Параллельна прямой $y=x$
В	Отсекает на осях равные отрезки
Г	Наклонена под тупым углом к Ox
Д	Пересекает Oy в нижней полуплоскости

Проект «Решение линейного уравнения в целых числах»

1. Один карандаш стоит 7 рублей, одна ручка 13 рублей. Ученик истратил 81 рубль. Сколько он купил карандашей и ручек?

Обозначив число карандашей через a, а число ручек через b, мы получаем уравнение $7a+13b=81$. Ясно, что из одного уравнения с двумя неизвестными нельзя однозначно найти a и b - задача кажется неопределенной, в ней не хватает условий. Однако на самом деле эта задача имеет единственное решение $a=6, b=3$. Дело в том, что мы ищем не любые числа a и b, удовлетворяющие написанному уравнению, а только натуральные.

2. Стоимость товара равна 23 рублям. Покупатель имеет трехрублевки, а кассир – одни пятирублевки (раньше трехрублевые купюры действительно существовали). Возможно ли осуществить покупку без предварительного размена денег?

Решение.

Пусть x - нужное количество трехрублевок, а y- нужное количество пятирублевок. Тогда $3x-5y=23$. Из уравнения имеем $x=\dfrac{23+5y}{3}$. Заметим, что выражение $23+5y$ должно нацело делиться на 3. Предположим, что у кассира имеется лишь одна купюра. Тогда $x=23+5\cdot 1=28$ - не годится. Проверяем значение $y=2$. $x=23+5\cdot 2=33$ - делится нацело на 3.

Ответ: покупатель дает 11 трехрублевок, а кассир возвращает ему 2 пятирублевки.

Могут ли быть другие варианты расчета за покупку при заданных выше условиях?

3. Докажите, что при любом целом числе t числа $x=6+13t, y=3-7t$ являются решениями уравнения $7x+13y=81$.
4. Докажите, что если целые числа x и y являются решением того же уравнения, то $x-6$ делится на 13, а $y-3$ делится на 7.
5. Из предыдущей задачи вытекает, что $x-6$ можно записать в виде $13t$ при некотором целом t. Докажите, что тогда $y=3-7t$.
6. Из этих трех задач вытекает, что система $\begin{cases} x=6+13t, \\ y=3-7t \end{cases}$ содержит все рушения уравнения $7x+13y=81$. Докажите, что (6;3) – единственное решение уравнения в натуральных числах.
7. Решите уравнения:

А) $5x + 7y = 19$,

Б) $11x + 9y = 82$,

В) Выберите из найденных вами решений первых двух уравнений только решение с положительными x и y.

Г) $14x + 3y = 37$,

Д) Докажите, что уравнение $14x - 3y = 37$ имеет бесчисленное множество решений в натуральных числах.

Проект «Теорема Виета»

Теорема Виета для квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ позволяет вычислить сумму корней $\delta_1 = x_1 + x_2$ и произведение корней $\delta_2 = x_1 \cdot x_2$ через коэффициенты квадратного трехчлена $x^2 + px + q$ так: $\delta_1 = -p$, $\delta_2 = q$.

С помощью теоремы Виета можно угадывать целые корни квадратного уравнения, не пользуясь формулой для их вычисления.

1. Найдите устно корни уравнения:

А) $x^2 - 5x + 6 = 0$; Д) $x^2 + 6x + 8 = 0$;

Б) $x^2 + 5x + 4 = 0$; Е) $x^2 - 2x - 15 = 0$;

В) $x^2 + x - 2 = 0$; Ж) $x^2 - 10x + 21 = 0$;

Г) $x^2 - x - 6 = 0$; З) $x^2 - 5x - 36 = 0$.

2. С помощью теоремы Виета можно выражать симметричные выражения от корней уравнения через его коэффициенты. Например, $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q$.

Выразите следующие симметричные выражения от корней квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ через его коэффициенты:

А) $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}$; Б) $x_1^3 + x_2^3$; В) $(x_1 - x_2)^2$; Г) $x_1^4 + x_2^4$; Д) $\dfrac{x_1}{x_2 + 1} + \dfrac{x_2}{x_1 + 1}$;

Е) $x_1^5 + x_2^5$;

Теорема Виета легко обобщается для многочленов любой степени. Например, перемножив скобки в левой части тождества $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 + px^2 + qx + r$, получим выражения $\delta_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -p$, $\delta_2 = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1 = q$, $\delta_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -r$.

3. Применяя тождество $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1)$, вычислите сумму квадратов корней кубического уравнения:

А) $x^3 + x^2 - 3x + 5 = 0$, Б) $x^3 + 2x - 7 = 0$.

О чем говорит то, что в ответе для второго уравнения получилось отрицательное число?

4. Докажите тождество $(x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_1)^2 = -4q^3 - 27r^2$ для корней кубического уравнения $x^3 + qx + r = 0$ (сумма его корней равна нулю).

5. Из предыдущего тождества выведите необходимое и достаточное условие для того, чтобы кубическое уравнение $x^3 + qx + r = 0$ имело два равных корня.

Проект «Исследование квадратичной функции»

Дана функция $y = x^2 + 2x$.

1) Найдите ее наибольшее и наименьшее значения на указанных отрезках.

А) $[-3;2]$; Б) $[0;3]$; В) $[-3;-1]$.

2) При каких значениях k функция $y = x^2 + 2x + k$ имеет два корня?

3) Найдите все такие отрезки $[a;b]$, чтобы областью значений функции y на них был отрезок $[3;8]$.

4) Докажите, что расстояния от любой точки графика функции y до точки $\left(-1;-\frac{3}{4}\right)$ и до прямой $y=-\frac{5}{4}$ равны между собой.

Самостоятельная работа по теме «Квадратичная функция»

Вариант 1	**Вариант 2**	**Вариант 3**
Дана функция $y=f(x)$, где $f(x)=-x^2+x+2$. Постройте ее график. Найдите ее область значений. Решите неравенство $f(x)\geq 2x$. Найдите точки экстремума функции.	Дана функция $y=f(x)$, где $f(x)=2x^2+x-3$. Найдите ее наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[-1;2]$. Постройте график функции $y=\lvert f(x)\rvert$. При каких значениях a уравнение $\lvert f(x)\rvert=a$ имеет четыре корня.	Дана функция $y=(a+1)x^2-(2a-3)x+a$. При каких значениях a функция y имеет экстремум при $x=2$? При каких значениях a функция y не имеет корней? Найдите наибольшее значение функции y на отрезке $[0;1)$ в зависимости от значений параметра a.

Тест по теме «Текстовые задачи»

1. Три числа, из которых третье равно 25, составляют возрастающую арифметическую прогрессию. Если вместо 25 взять 45, то полученные три числа, составят геометрическую прогрессию. Найти первые два числа. В ответе записать их среднее геометрическое.	5	$5\sqrt{3}$	25	$25\sqrt{15}$
2. Бригада за определенный срок должна изготовить 72 изделия. Однако три члена бригады были переведены на другую работу. Какова численность бригады, если для выполнения задания в срок каждому из оставшихся членов бригады необходимо изготовить на 4 изделия больше, чем планировалось.	6	8	9	10
3. Первоначальная цена товара была 200 денежных единиц. Затем цену повысили на 20%, а вскоре понизили на 20%. Какова последняя цена товара?	200	192	202	210
4. Имеется руда из двух пластов с содержанием меди в 6% и 11%. Сколько «бедной» руды нужно взять, чтобы при смешивании с «богатой» получить 20 тонн с содержанием меди 8%?	10	12	14	16
5. Из двух городов навстречу друг другу вышли два поезда. Первый шел со скоростью 54 км/ч, а второй, выйдя на 2 часа позже первого, со скоростью 75 км/ч и до встречи прошел на 102 км больше первого. Каково расстояние между городами?	1256	1596	1600	1398

Лекция «Равносильность уравнений на множествах»

Понятия

Равносильность уравнений 1) $\Leftrightarrow$ 2)	Уравнения 1) и 2) называются равносильными, если множества их решений совпадают, то есть если каждое решение уравнения 1) есть решение уравнения 2)

	и, обратно, всякое решение уравнения 2) есть решение уравнения 1).
Уравнение-следствие $2)\Rightarrow 1)$	Уравнение 1) называется следствием уравнения 2), если всякое решение уравнения 2) является решением уравнения 1).
Система уравнения $\begin{cases}1),\\2).\end{cases}$	Набор нескольких уравнений вместе с задачей найти решения, которые удовлетворяют каждому из уравнений.
Совокупность уравнений $\left[\begin{array}{l}1),\\2).\end{array}\right.$	Набор нескольких уравнений вместе с задачей найти решения, которые удовлетворяют хотя бы одному из уравнений.

Утверждения

1. **1.** Связь между понятиями равносильности и следствия. Два уравнения равносильны тогда и только тогда, когда каждое из них является следствием другого.
2. **2.** Сохранение равносильности. Если к двум частям уравнения прибавить одно и то же число или их умножить на одно и то же число, отличное от нуля, то получится уравнение, равносильное исходному.
3. **3.** Получение следствий. Следующие преобразования приводят к следствию данного уравнения:
   - умножение обеих частей уравнения на одно и то же выражение, не сужающее ОДЗ уравнения;
   - возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень.
4. **4.** Нарушение равносильности. Могут нарушить равносильность уравнений (изменить множество его корней):
   - преобразования, изменяющие ОДЗ уравнения (взаимное уничтожение членов, сокращение дробей, прибавление к обеим частям уравнения одного и того же выражения, возведение в квадрат или другую четную степень и т.п.);
   - преобразования, которые могут вызвать появление посторонних корней (умножение обеих частей уравнения на одно и то же выражение – за счет корней этого выражения, возведение в квадрат или другую четную степень – за счет «потери» знака и т.п.);
   - преобразования, которые могут вызвать потерю корней (сокращение обеих частей уравнения на общий множитель – за счет корней этого множителя; извлечение квадратного корня из двух частей уравнения без учета знака и т.п.).

Связь между уравнениями может быть записана с помощью отношений между множествами их решений.

Пусть множества решений уравнений 1) и 2) обозначены соответственно A_1 и A_2.

Логическая связь	Термин	Множество решений
$1)\Leftrightarrow 2)$	равносильность	$A_1 = A_2$
$2)\Rightarrow 1)$	следствие	$A_2 \subset A_1$
$\begin{cases}1),\\2).\end{cases}$	система	$A_1 \cap A_2$
$\left[\begin{array}{l}1),\\2).\end{array}\right.$	совокупность	$A_1 \cup A_2$

Связь между понятиями равносильности и следствия также может быть выражена на языке теории множеств: $1)\Leftrightarrow 2)$ означает, что $1)\Rightarrow 2)$ и $2)\Rightarrow 1)$; $A_1 = A_2$ означает, что $A_1 \subset A_2$ и $A_2 \subset A_1$.

Примеры нарушения равносильности

1	$x+\frac{1}{x}+2\left(x-\frac{1}{2x}\right)=0$	$x+2x=0$

2	$\frac{x^2-1}{x-1}=2$	$x+1=2$
3	$\sqrt{x^2-2}=\sqrt{x}$	$x^2-2=x$
4	$x-1=2x+3$	$x^2-x=2x^2+3x$
5	$x-2=1-2x$	$(x-2)^2=(1-2x)^2$
6	$x^2-1=(x-1)(2x+1)$	$x+1=2x+1$
7	$x^2=(2x-1)^2$	$x=2x-1$

Тест по теме «Равносильность уравнений на множествах».

Для каждой пары уравнений (1) и (2) ответьте на вопросы.
А) Правда ли, что $(1)\Rightarrow(2)$?
Б) Правда ли, что $(2)\Rightarrow(1)$?
В) Правда ли, что $(1)\Leftrightarrow(2)$?

(1)	(2)
$x+5+\sqrt{x}=2x+\sqrt{x}$	$x+5=2x$
$x+6+\ln x=3x+\ln x$	$x+6=3x$
$x^3-3x^2+2x=0$	$x^2-3x+2=0$
$\frac{x^2-4}{x-2}=0$	$x^2-4=0$
$\frac{(x-2)^2(x+2)}{x-2}=0$	$(x-2)(x+2)=0$
$(x-2)(x+4)=(3x-1)(x+4)$	$x-2=3x-1$
$x^2=16$	$\lvert x\rvert=4$
$x^2+2x+1=4$	$x+1=2$
$\sqrt{3x}=\sqrt{2x-1}$	$3x=2x-1$
$\sin x+\cos x=1$	$(\sin x+\cos x)^2=1$
$\log_2(x+2)=\log_2(3-x)$	$x+2=3-x$
$\arcsin x=1$	$x=\sin 1$

Тест по теме «Равносильность неравенств на множествах»

1. Докажите или приведите опровергающий пример.
А) Если умножить обе части неравенства на выражение, не обращающиеся в нуль, то получим неравенство, равносильное исходному.
Б) Неравенство $f-g>0$ равносильно неравенству $g-f<0$.
В) Неравенство $f>1$ равносильно неравенству $\frac{1}{f}<1$.
Г) При возведении неравенства в квадрат могут как потеряться, так и появиться новые решения.
Д) Неравенство $f<g$ равносильно неравенству $2^f<2^g$.
Е) Неравенства $\frac{x}{x+1}>0$ и $\frac{x+1}{x}>0$ равносильны.
Ж) Всякое решение неравенства $x-1<0$ является решением неравенства $x(x-1)<0$.
З) Если неравенство $x^2+x+a<0$ имеет решения, то $a<0$.

2. Для каждой пары неравенств (1) и (2) ответьте на следующие вопросы:

А) Правда ли, что $(1) \Rightarrow (2)$?

Б) Правда ли, что $(2) \Rightarrow (1)$?

В) Правда ли, что $(1) \Leftrightarrow (2)$?

(1)	(2)
$x+3-\frac{1}{x+7}<2-\frac{1}{x+7}$,	$x+3<2$
$2x-3-\frac{1}{x-5}<x-4-\frac{1}{x-5}$,	$2x-3<x-4$
$5x-6+\sqrt{x}<3x+\sqrt{x}$	$5x-6<3x$
$\frac{x-3}{x+1}>1$	$x-3>x+1$
$\frac{x-2}{x^2+1}<1$,	$x-2<x^2+1$
$\frac{(x-2)^2(x+1)}{x-2}>0$	$(x-2)(x+1)>0$
$\frac{1}{x-3}<2$,	$x-3>\frac{1}{2}$
$x^2 \ge x$	$x \ge 1$
$\sqrt{(x-4)^2(x+1)}>0$	$x+1>0$
$\sqrt{(x+4)^2(x+1)>0}$	$x+1>0$
$\sqrt{x}<x+1$	$x<(x+1)^2$
$\log_2 x^2 \le 2$	$\log_2 x \le 1$
$\sin x>\frac{1}{2}$	$x>\arcsin\frac{1}{2}$

Самостоятельная работа

1. Уравнение $f(x)=\frac{1}{2}$, где f - данная функция, имеет единственный корень.

А) $f(x)=7-3x$; **Б)** $f(x)=2x-x^2$; **В)** $f(x)=2^{x+1}$**;** **Г)** $f(x)=\lg(x-1)$; **Д)** $f(x)=\sin x$.

2. Неравенство $f(x)\le 1$, где f - данная функция, выполняется для всех x в промежутке $[0;1]$.

А) $f(x)=2-5x$; **Б)** $f(x)=x^2-x-2$; **В)** $f(x)=\sqrt{1-x}$; **Г)** $f(x)=3^{-x}$; **Д)** $f(x)=\lg(x+9)$.

3. Все корни данного уравнения – целые числа.

А) $|2x-1|=3$; **Б)** $x^3+2x^2-x-2=0$; **В)** $(\lg x)^2-\lg x-2=0$; **Г)** $4^{\frac{1}{x}}=32\cdot 4^{-x}$; **Д)** $\sin\frac{\pi x}{2}=-1$.

Методическое обеспечение раздела «Функции в задачах с параметрами в курсе старшей школы и на вступительных экзаменах»

Самостоятельная работа №1

Вариант №1	Вариант №2
1. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых решения уравнения $(x-6a)^2+(x-2a)^2=128$ симметричны относительно точки $x=12$. **2.** Для каждого значения параметра a найдите число решений уравнения $9(3x-1)a^2-(21x-19)a+2(x-1)=0$. **3.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых больший корень уравнения $x^2-(20a-3)x+100a^2-30a=0$ в 6 раз больше, чем его меньший корень. **4.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнения $x^2+3x+7a-21=0$ и $x^2+6x+5a-6=0$ имеют хотя бы один общий корень. **5.** Определите, при каких значениях параметра *a* неравенство $(x-a)(a-2x+1)\le 0$ верно для всех $x\in[-2;3]$.	**1.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых решения уравнения $(x-2a)^2+(x-4a)^2=242$ симметричны относительно точки $x=-3$. **2.** Для каждого значения параметра a найдите число решений уравнения $2(4x-1)a^2-(14x-11)a+5(x-1)=0$. **3.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых больший корень уравнения $x^2-(8a-7)x+16a^2-28a=0$ в 10 раз больше, чем его меньший корень. **4.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнения $x^2+3x+7a-21=0$ и $x^2+6x+5a-6=0$ имеют хотя бы один общий корень. **5.** Определите, при каких значениях параметра *a* неравенство $(a-x)(x-3a+6)\le 0$ верно для всех $x\in[1;4]$.

Самостоятельная работа №2

Вариант №1	Вариант №2
1. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=2a,\\ \frac{5}{x}+\frac{12}{y}=1-3a\end{cases}$ имеет хотя бы одно решение. **2.** При каждом значении параметра a решите неравенство $\frac{3}{ax+a}>\frac{1}{5}$. **3.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых решением неравенства $\frac{x^2+x-12}{x^2-(a-4)x-4a}<0$ является объединение двух непересекающихся интервалов.	**1.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4a,\\ \frac{4}{x}+\frac{5}{y}=1-a\end{cases}$ имеет хотя бы одно решение. **2.** При каждом значении параметра a решите неравенство $\frac{1}{ax-a}>\frac{3}{4}$. **3.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых решением неравенства $\frac{x^2-5x-6}{x^2-(a-1)x-a}<0$ является объединение двух непересекающихся интервалов.

Самостоятельная работа №3

Вариант №1 **1.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $\sqrt{5ax+3a}=5x+3$ имеет ровно одно решение. **2.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых неравенство $\sqrt{4a^2-x^2}\geq\lvert x-2a\rvert$ имеет единственное решение. **3.** Решите при всех значениях параметра $\sqrt{x^2+ax}=x-2a$.	**Вариант №2** **1.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3ax+5a}=3x+5$ имеет ровно одно решение. **2.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых неравенство $\sqrt{3a^2-x^2}\geq\lvert x+a\rvert$ имеет единственное решение. **3.** Решите при всех значениях параметра $\sqrt{x^2-ax}=x+2a$.

Самостоятельная работа №4

Вариант №1 **1.** При каких значениях параметра a уравнение $(15\sin x-a-5)(15\sin x+2a-5)=0$ имеет ровно два решения на отрезке $[0;2\pi]$? **2.** Для всех значений параметра a решите уравнение: $\sin 3x=a\sin x$ **3.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых имеет хотя бы одно решение система уравнений $\begin{cases}24\cos^2 x+11\cos^2 y=10a-17,\\33\cos^2 x+8\cos^2 y=28a-59.\end{cases}$ **4.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых прямая $y=a$ пересекает хотя бы в одной точке график функции $y=\dfrac{tg^2x+7}{3tgx+1}$.	**Вариант №2** **1.** При каких значениях параметра a уравнение $(11\sin x-3a-5)(11\sin x+4a+3)=0$ имеет ровно два решения на отрезке $[0;2\pi]$? **2.** Для всех значений параметра a решите уравнение: $\cos 3x=a\cos x$ **3.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых имеет хотя бы одно решение система уравнений $\begin{cases}21\cos^2 x+11\cos^2 y=9a-8,\\33\cos^2 x+7\cos^2 y=45a-64.\end{cases}$ **4.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых прямая $y=a$ пересекает хотя бы в одной точке график функции $y=\dfrac{tg^2x+45}{7tgx+2}$.

Самостоятельная работа №5

Вариант №1 **1.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $25^x+(5\cdot a^2+a+4)\cdot 5^x-a-2=0$ име-	**Вариант №2** **1.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $81^x+(4\cdot a^2+3\cdot a+4)\cdot 9^x-2\cdot a+3=0$

ет единственное решение. **2.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $9^x-(7a-1)\cdot 3^x+12a^2-a-6\le 0$ имеет единственное решение. **3.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4^{49x^2-70x+26}=\cos 14\pi x-81a^2-72a-13$ имеет решения. Найдите эти решения. **4.** При каком значении a уравнение $\sqrt{2^{a+2+2x}}-2^{2x}=y^2-2y\sqrt{a}+11$ имеет единственное решение.	имеет единственное решение. **2.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $4^x-(5a-1)\cdot 2^x+6a^2-a-2\le 0$ имеет единственное решение. **3.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $14^{25x^2-10x+2}=\cos 10\pi x-36a^2-60a-12$ имеет решения. Найдите эти решения. **4.** При каком значении a уравнение $2^{2a+3+x}-4^{x+1}=4y^2-8y\sqrt{a}+9$ имеет единственное решение.

Самостоятельная работа №6

Вариант №1 **1.** Найдите все значения параметра b, при каждом из которых уравнение $\ell og_3 \dfrac{3}{14x^2+3}=x^2+(5b-1)^2$ имеет хотя бы одно решение. **2.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\ell og_{11}^2 x-(10a+23)\ell og_{11}x+25a^2+115a+132=0$ имеет два различных корня, равноудалённых от точки $x=66$. **3.** Для всех значений параметра a решить неравенство: $x^{\ell og_a x}>a^3x^2$	**Вариант №2** **1.** Найдите все значения параметра b, при каждом из которых уравнение $\ell og_9 \dfrac{9}{10x^2+9}=x^2+(13b-12)^2$ имеет хотя бы одно решение. **2.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\ell og_4^2 x-(6a+23)\ell og_4 x+9a^2+69a+132=0$ имеет два различных корня, равноудалённых от точки $x=40$. **3.** Для всех значений параметра a решить неравенство: $x^{\ell og_a x}<a^2x$.

Рекомендуемая литература

1. Амелькин В.В., Рабцевич В.Л. *Задачи с параметрами*. Справ. пособие по математике. - Мн.: Асар, 1996.

2. *Алгебра и начала анализа. Сборник задач для подготовки и проведения итоговой аттестации за курс средней школы.* Под редакцией Шестакова С.А. – М.: Внешсигма-М, 2004.

3. Апанасов П.Т., Апанасов Н.П. *Сборник математических задач с практическим содержанием.* - М.: Просвещение, 1987.

4. Атанасян Л.С. и др. *Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 8 класс.* – М.: изд. «Вита-Пресс», 2002.

5. Атанасян Л.С. и др. *Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 9 класс.* – М.: изд. «Вита-Пресс», 2002.

6. Башмаков М.И. *Математика. Практикум по решению задач*- М.: Просвещение, 2005.

7. Виленкин Н.Я. и др. *Алгебра и математический анализ для 10 класса.* - М.: Просвещение, 1997.

8. Виленкин Н.Я. и др. *Алгебра и математический анализ для 11 класса*. - М.: Просвещение, 1996.

9. Виленкин Н.Я. и др. *За страницами учебника математики: Арифметика, Алгебра, Геометрия*: кн. для учащихся 10-11 кл. общеобразоват. учреждений.- М: Просвещение, 1996.

10. Галицкий М.Л., Мошкович М.М., Шварцбурд С.И. *Углубленное изучение алгебры и математического анализа: Методические рекомендации и дидактические материалы.* – М.: Просвещение, 1997.

11. Гиндикин С.Г. *Рассказы о физиках и математиках.* - М.: Просвещение, 1981.

12. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. *Задачи с параметрами*. - М.: Илекса, Гимназия, 1998.

13. Дорофеев Г.В. и др. *Сборник заданий для подготовки и проведения письменного экзамена по математике (курс А) и алгебре и началам анализа (курс В) за курс средней школы. 11 класс*: Экспериментальное пособие. – М.: Дрофа, 2001.

14. Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. *Как решают нестандартные задачи*. - М.: МЦМНО, 1997.

15. Малышев И.Г. и др. *Элементы физико-математического моделирования в естествознании. Элементы планиметрии в старшей школе.* // Н.Новгород: Нижегородский гуманитарный центр, 2005 г.

16. Малышев И.Г. и др. *Многочлены в школьном курсе математики и на вступительных экзаменах* // Н.Новгород: издательство ННГУ им. Н.И.Лобачевского, 2006 г.

17. Никольский С.М.и др. *Алгебра и начала анализа для 11 класса.* - М.: Просвещение, 2003.

18. *Сборник задач для подготовки и проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы*. Под редакцией Шестакова С.А. – М.: АСТ; Астрель, 2004.

19. Терешин Н.А. *Прикладная направленность школьного курса математики.* - М.: Просвещение, 1990.

20. Тихов. М.С. *125 занятий с одаренными детьми*. - Н.Новгород: ННГУ, 1999.

Пронумеровано, прошнуровано,
скреплено печатью
20 (двадцать) листа
Директор школы:
В.М.Лупова